MATHEMATICS

EINE INVARIANTE SPHÄRISCHER ABBILDUNGEN

VON

JOSEPH WEIER

(Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER at the meeting of October 27, 1956)

Seien m, n natürliche Zahlen >1 und S, T Euklidische Sphären in dem Euklidischen Raum R, S von der Dimension m, T von der Dimension n und f eine stetige Abbilding von S in T. Wenn f_1 eine weitere stetige Abbildung von S in T und für jeden Punkt p aus S die beiden Punkte $f(p)$, $f_1(p)$ bezüglich T nicht antipodisch liegen, so heisse f_1 eine „zu f benachbarte" Abbildung. Sei F die Menge aller zu f benachbarten Abbildungen von S in T. Dann wollen wir nach Bedingungen suchen, dass jede Abbildung f_2 aus F die Gleichung $f(p)=f_2(p)$ für wenigstens einen Punkt p aus S erfüllt.

Zunächst folgende Erklärung. Seien a ein Punkt aus S und f_3, f_4 zwei Abbildungen aus F, $f_3(a)=f_4(a)$ und $f_3(p)\neq f_4(p)$ in allen Punkten p aus $S-a$. Den Punkt $f_3(a)=f_4(a)$ bezeichnen wir auch mit b. Seine weiter β der Radius von T, V die Menge aller Punkte p aus T mit $d(b, p)<\beta$ und α eine positive Zahl kleiner als der Radius von S derart, dass, wenn U die Menge aller Punkte p aus S mit $d(a, p)<\alpha$ bedeutet,

$$f_3(\overline{U})+f_4(\overline{U})\subset V.$$

Es bezeichne W ein Simplex in R, t eine topologische Abbildung von $\overline{V}$ auf $\overline{W}$, W_1 die Trägerebene von W und c den Punkt $t(b)$. Weiter bezeichne h die durch

$$h(p)=c+(tf_3(p)-tf_4(p)),\ p\in\overline{U}-U,$$

bestimmte Abbildung von $\overline{U}-U$ in W_1-c. Für $p\in\overline{U}-U$ sei $h'(p)$ jener Punkt in $\overline{W}-W$, in dem der Halbstrahl aus c durch $h(p)$ die Sphäre $\overline{W}-W$ schneidet. Dann stellt h' eine Abbildung der $(m-1)$-Sphäre $\overline{U}-U$ in die $(n-1)$-Sphäre $\overline{W}-W$ dar. Je nachdem diese Abbildung wesentlich ist oder nicht, heisse a eine „stabile" oder „nicht stabile" Lösung der Gleichung $f_3(p)=f_4(p)$ und (f_3, f_4) ein stabiles oder nicht stabiles Abbildungspaar. Hierauf gilt, wie wir in dieser Arbeit zeigen werden:

Es gibt in F zwei Abbildungen g_1, g_2 derart, dass die Gleichung $g_1(p)=g_2(p)$ genau eine Lösung besitzt. Dann und nur dann existiert zu jeder Abbildung g aus F wenigstens ein Punkt p in S mit $f(p)=g(p)$, wenn das Abbildungspaar (g_1, g_2) stabil ist.

Behielte der vorstehende Satz seine Gültigkeit, wenn wir F als die

Menge aller zu f homotopen Abbildungen erklärt hätten? Diese Frage, deren Beantwortung Ueberlegungen notwendig macht, wie sie Beweise für die Homotopieinvarianz des Brouwerschen Abbildungsgrades [1]) erfordern, wird im folgenden nicht mehr behandelt.

1. *Präliminarien.* – Die oben erklärte Bedeutung von R, S, T gelte auch weiterhin. Dabei heisse, wenn L ein linearer Raum in R, q ein Punkt aus L und ζ eine positive Zahl, die Menge aller Punkte p aus L, deren Abstand von q gleich ζ ist, eine „Euklidische Sphäre". Das topologische Bild einer Euklidischen Sphäre heisse „Sphäre". Die oben und im folgenden benutzten „Simplexe" sind offen und gradlinig. Sind s ein Punkt aus S, δ der Durchmesser von S und η eine positive Zahl $<\delta$, so heisse die Menge aller Punkte p aus S, deren Abstand von s kleiner als η ist, eine „Kugelkappe". Für zwei Punkte a, b aus R bedeute $d(a, b)$ den Euklidischen Abstand dieser Punkte.

Wenn f, f' stetige Abbildungen von S in T, p ein Punkt aus S und $f(p) = f'(p)$, so heisse p ein „Übereinstimmungspunkt" von (f, f'). Wenn $f^i, i=1, \ldots, 4$, stetige Abbildungen von S in T, $f^1=f^2$ und $f^3=f^4$, so schreiben wir auch $(f^1, f^3)=(f^2, f^4)$. Ist f zu f' benachbart und hat (f, f') genau einen Übereinstimmungspunkt, so heisse (f, f') ein „kanonisches" Abbildungspaar.

Es folgen zwei elementare Bemerkungen.

Seien g, h, g', h' stetige Abbildungen von S in T, g zu h benachbart, g' zu h' benachbart, g zu g' homotop und h zu h' homotop. Dann gibt es von τ stetig abhängende stetige Abbildungen g^τ und h^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von S in T derart, dass $(g^0, h^0)=(g, h)$, $(g^1, h^1)=(g', h')$ und für alle τ die Abbildung g^τ zu h^τ benachbart ist.

Beweis. – Da g zu g' homotop, gibt es von τ stetig abhängende stetige Abbildungen g^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von S in T mit $g^0=g$ und $g^1=g'$. Da g zu h benachbart, gibt es von τ stetig abhängende stetige Abbildungen f_0^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von S in T derart, dass $f_0^0=h$, $f_0^1=g$ und f_0^τ für alle τ zu g benachbart. Da g' zu h' benachbart, gibt es von τ stetig abhängende stetige Abbildungen f_1^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von S in T derart, dass $f_1^0=h'$, $f_1^1=g'$ und f_1^τ für alle τ zu g' benachbart.

Wenn die Zahl $0<\varepsilon<1/2$ nur hinreichend klein, so gilt: für alle (σ, τ) mit $0 \leqslant \sigma \leqslant \varepsilon$ und $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ ist f_0^τ zu g^σ benachbart; für alle (σ, τ) mit $1-\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1$ und $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ ist f_1^τ zu g^σ benachbart; ist λ die durch $\lambda(\varepsilon)=0$ und $\lambda(1-\varepsilon)=1$ bestimmte lineare Abbildung des abgeschlossenen Intervalles zwischen ε und $1-\varepsilon$ auf das abgeschlossene Intervall zwischen 0 und 1, so sind für $\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 1-\varepsilon$ die Abbildungen g^τ und $g^{\lambda(\tau)}$ benachbart.

Setzt man hierauf $h^\tau=f_0^{\tau/\varepsilon}$ für $0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon$, weiter $h^\tau=g^{\lambda(\tau)}$ fur $\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 1-\varepsilon$ und $h^\tau=f^{(\tau-1)/\varepsilon}$ für $1-\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 1$, so sind die so bestimmten Abbildungen g^τ und h^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von der verlangten Art.

---

[1]) Mathem. Annalen 71 (1912).

Seien a ein Punkt aus S, ε eine positive Zahl und f_i^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $i=1, 2$, von τ stetig abhängende stetige Abbildungen von S in T,

$$f_1^0(a) \neq f_2^0(a) \text{ und } f_1^1(a) \neq f_2^1(a).$$

Dann gibt es von τ stetig abhängende stetige Abbildungen g_i^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $i=1, 2$, von S in T derart, dass

$$g_1^\tau(a) \neq g_2^\tau(a) \text{ für } 0 \leqslant \tau \leqslant 1$$

und $g_i^k = f_i^k$ für alle (i, k) mit $i=1, 2$ und $k=0, 1$.

Beweis. — Seien n die Dimension von R, R_{n+1} der $(n+1)$-dimensionale Euklidische Raum, U die Menge aller Punkte $p=(q, \tau)$ aus R_{n+1} mit $q \in S$ und $0 < \tau < 1$, ferner f_i für $i=1, 2$ die durch

$$f_i(p) = f_i^\tau(q), \quad p \in \overline{U},$$

bestimmte Abbildung von $\overline{U}$ in T, weiter A das 1-Simplex aus U mit $(a, 0)$ und $(a, 1)$ als Eckpunkten.

Dann folgt aus $\dim T > 1$ leicht, dass stetige Abbildungen g_1, g_2 von $\overline{U}$ in T existieren, die die Eigenschaften haben: für $p \in \overline{U} - U$ und $i=1, 2$ ist $f_i(p) = g_i(p)$, für $i=1, 2$ ist $d(f_i, g_i) < \varepsilon$, auf $\bar{A}$ ist g_1 und ebenso g_2 simplizial, die Menge

$$B = g_1(\bar{A}) \cdot g_2(\bar{A})$$

ist endlich. — Wenn $B=0$, so kann man $g_i^\tau(p) = g_i(p, \tau)$ setzen.

Hierauf seien $B \neq 0$ und $b_1, \ldots, b_m$ die Punkte von B, ferner $V_1, \ldots, V_m$ in U offene paarweis zueinander fremde Mengen, so dass für alle i gilt: $b_i \in V_i$; es ist $\overline{V}_i$ zur abgeschlossenen Hülle eines Simplexes homöomorph; wenn $A_i = A \cdot V_i$, so ist A_i ein eindimensionales Simplex und $\bar{A}_i = \bar{A} \cdot \overline{V}^i$.

Somit besitzen die Abbildungen g_1, g_2 auf $\overline{V}_i$ genau einen Uebereinstimmungspunkt, und dies ist der Punkt b_i. Durch eine kleine Deformation von g_1 und g_2 lässt sich erreichen, diesen Uebereinstimmungspunkt in die Menge $V_i - \bar{A}_i$ zu verschieben. Mithin:

Es existieren stetige Abbildungen h_1, h_2 von $\overline{U}$ in T derart, dass $f_i(p) = h_i(p)$ für $p \in \overline{U} - U$ und $i=1, 2$, weiter $d(f_i, h_i) < \varepsilon$ für $i=1, 2$ und

$$h_1(p) \neq h_2(p) \text{ für } p \in \bar{A}.$$

Alsdann kann man $g_i^\tau(p) = h_i(p, \tau)$ setzen.

2. *Kanonische Abbildungspaare.* — Sind f^1, f^2 stetige Abbildungen von S in T und $d(f^1, f^2)$ hinreichend klein, so ist f^1 zu f^2 homotop. Wir wollen zeigen:

Seien ε eine positive Zahl und f eine stetige Abbildung von S in T. Dann gibt es stetige Abbildungen g, h von S in T derart, dass $d(f, g) < \varepsilon$ sowie $d(f, h) < \varepsilon$ und dass die Gleichung $g(p) = h(p)$ genau eine Lösung hat.

Beweis. — Zunächst gibt es einen Punkt a in S und stetige Abbildungen g_0, h_0 von S in T mit der Eigenschaft: bedeutet A die Menge der Koinzidenzen von (g_0, h_0), so ist $a \notin A$.

Die Menge A ist kompakt. Aus $a \notin A$ folgt daher die Existenz einer Kugelkappe U_0 von S derart, dass $A \subset U_0$.

Wir bezeichnen der Radius von T mit γ. Dann existieren eine positive Zahl δ, Kugelkappen $U_1, \ldots, U_m$ von S und topologische Abbildungen $t_0, \ldots, t_{m-1}$ von S auf sich, die die Eigenschaften haben: wenn y eine stetige Abbildung von S in T und $d(f, y) < \delta$, so ist

$$d(y, y(t_i)^{-1}) < \min(\gamma, \varepsilon/2) \tag{1}$$

für alle Zahlen $i = 0, \ldots, m-1$; für $i = 0, \ldots, m-1$ ist ferner

$$\overline{U}_i \supset U_{i+1} \text{ und } t_i(\overline{U}_i) = \overline{U}_{i+1};$$

die Menge $f(\overline{U}_m)$ hat einen Durchmesser $< \min(\gamma, \varepsilon/2)$.

Wie man sich leicht überlegt, kann man annehmen, es sei $d(f, g_0) < \min(\gamma, \delta, \varepsilon/2)$ und ebenso $d(f, h_0) < \min(\gamma, \delta, \varepsilon/2)$.

Bedeute j eine der Zahlen $0, \ldots, m-2$. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, es existierten stetige Abbildungen g_j, h_j von S in T mit den Eigenschaften:

$$d(f, g_j) < \min(\gamma, \delta, \varepsilon/2) \text{ und } d(f, h_j) < \min(\gamma, \delta, \varepsilon/2); \tag{2}$$

bezeichnet A_j die Koinzidenzmenge von (g_j, h_j), so ist $A_j \subset U_j$.

Nunmehr setzen wir $g_j^* = g_j(t_j)^{-1}$ und $h_j^* = h_j(t_j)^{-1}$. Dann ist, wie aus (1) und (2) folgt, $d(g_j, g_j^*) < \gamma$ und $d(h_j, h_j^*) < \gamma$. Somit folgt

$$d(f, g_j^*) < 2\gamma \text{ und } d(f, h_j^*) < 2\gamma \tag{3}$$

aus den Beziehungen (2).

Die Menge $t_j(A_j)$ bezeichnen wir auch mit A_{j+1}. Wie man leicht bestätigt, ist A_{j+1} die Menge aller Punkte p aus S mit $g_j^*(p) = h_j^*(p)$. Es folgt

$$A_{j+1} \subset U_{j+1}$$

aus $A_j \subset U_j$ und $t_j(U_j) = U_{j+1}$.

Sind p_1, p_2 zwei nicht antipodisch gelegene Punkte von T und τ eine Zahl mit $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, so bedeute $x(p_1, p_2, \tau)$ die Projektion des Punktes $(1-\tau)p_1 + \tau p_2$ auf T aus dem Mittelpunkt von T.

Offenbar gibt es eine Zahl ζ mit $0 < 2\gamma\zeta < 1$ derart, dass für alle nicht antipodisch gelegenen Punktpaare (p_1, p_2) aus T die Entfernung

$$d(p_1, x(p_1, p_2, 2\gamma\zeta) < \min(\gamma, \delta, \varepsilon/2). \tag{4}$$

Hierauf setzen wir

$$g_{j+1}(p) = x[f(p),\ g_j^*(p),\ \zeta d(f(p),\ g_j^*(p))],$$
$$h_{j+1}(p) = x[f(p),\ h_j^*(p),\ \zeta d(f(p),\ h_j^*(p))]$$

in allen Punkten p aus S. Diese Erklärung ist wegen (3) möglich. Aus (4) folgt, dass sowohl $d(f, g_{j+1})$ wie $d(f, h_{j+1})$ kleiner als $\min(\gamma, \delta, \varepsilon/2)$ ist.

Zum Beweis, dass A_{j+1} die Menge der Koinzidenzen von (g_{j+1}, h_{j+1}) ist, bedeute $q \in S$ *erstens* einen Punkt, der nicht in A_{j+1} liegt. Dann ist $g_j^*(q) \neq h_j^*(q)$. Sei $G(p)$ die Menge der Punkte

$$x(f(q), g_j^*(q), \tau) \text{ aus } T \text{ mit } 0 < \tau \leqslant 1.$$

und $H(q)$ die Menge aller $x(f(q), h_j^*(q), \tau) \in T$ mit $0 < \tau \leqslant 1$. Wenn $G(q) \cdot H(q) = 0$, so ist nichts weiter zu beweisen. Im anderen Falle gibt es eine zweidimensionale Ebene, die gleichzeitig den Mittelpunkt von T, den Punkt $f(q)$ und die beiden Punkte $g_j^*(q), h_j^*(q)$ enthält. Daher ist $G(q) \subset H(q)$ oder $H(q) \subset G(q)$, je nachdem

$$d(f(q), g_j^*(q)) < \text{ oder } > d(f(q), h_j^*(q)).$$

Der Fall, dass $d(f(q), g_j^*(q)) = d(f(q), h_j^*(q))$, ist nicht möglich, da dann $g_j^*(q) = h_j^*(q)$ wäre. Mithin ist $g_{j+1}(q)$ von $h_{j+1}(q)$ verschieden. *Zweitens* sei $q \in A_{j+1}$. Hier ist $g_j^*(q) = h_j^*(q)$, also $g_{j+1}(q) = h_{j+1}(q)$. Insgesamt: A_{j+1} ist die Menge der Uebereinstimmungspunkte von (g_{j+1}, h_{j+1}).

Somit existieren eine abgeschlossene Menge A_m in U_m und stetige Abbildungen g, h_m von S in T, die die Eigenschaften haben:

$$d(f, g) < \min(\gamma, \varepsilon/2) \text{ und } d(f, h_m) < \min(\gamma, \varepsilon/2), \tag{5}$$

die Menge der Uebereinstimmungspunkte von (g, h_m) ist gleich A_m.

Der Erklärung von U_m zufolge hat $f(\overline{U}_m)$ einem Durchmesser $< \min(\gamma, \varepsilon/2)$. Aus (5) folgt daher, dass die Menge $f(\overline{U}_m) + g(\overline{U}_m) + h_m(\overline{U}_m)$ einen Durchmesser $< \min(2\gamma, \varepsilon)$ hat. Es gibt also eine Kugelkappe V von T, für die

$$f(\overline{U}_m) + g(\overline{U}_m) + h_m(\overline{U}_m) \subset V \tag{6}$$

und deren Durchmesser $< \varepsilon$ ist.

Seien V_0 ein Simplex und t eine topologischen Abbildung von $\overline{V}$ auf $\overline{V}_0$. Dann stellen tf, tg, th_m stetige Abbildungen von $\overline{U}_m$ in V_0 dar. Und es ist

$$tg(p) \neq th_m(p) \text{ für } p \in \overline{U}_m - U_m.$$

Seien a ein Punkt aus U_m, b ein Punkt aus V_0 und $w(p)$ für $p \in \overline{V}_0 - b$ die Projektion von p auf $\overline{V}_0 - V_0$ aus b, ferner

$$\lambda(p) = d(p, a)/(d(p, a) + d(p, \overline{U}_m - U_m))$$

für $p \in \overline{U}_m$ und V_1 die Trägerebene von V_0.

Hierauf werde h^* wie folgt als stetige Abbildung von $\overline{U}_m$ in den linearen Raum V_1 bestimmt:

$$h^*(p) = tg(p) + \lambda(p)\ (th_m w(p) - tgw(p))$$

für alle Punkte p aus $\overline{U}_m - a$, $h^*(a) = tg(a)$. Wegen $tg(p) \neq th_m(p)$, $p \in \overline{U}_m - - U_m$, ist $tg(p) \neq h^*(p)$ für $p \in \overline{U}_m - a$.

Eine stetige Abbildung h^{**} von $\overline{U}_m$ in $\overline{V}_0$ wird bestimmt, wenn man für jeden Punkt p aus $\overline{U}_m$ definiert: liegt $h^*(p)$ in $\overline{V}_0$, so ist $h^{**}(p) = h^*(p)$;

sonst ist $h^{**}(p)$ der Punkt, in dem der Halbstrahl aus $tg(p)$ durch $h^*(p)$ die Menge $\overline{V}_0 - V_0$ schneidet.

Wie über h^* gilt auch über h^{**}, dass $tg(a) = h^{**}(a)$ und

(7) $$tg(p) \neq h^{**}(p) \text{ für } p \in \overline{U}_m - a.$$

Sei q ein Punkt aus $\overline{U}_m - U_m$. Dann ist $\lambda(q) = 1$ und $w(q) = q$, daher $h^*(q) = th_m(q)$. Nun ist $h_m(q) \in V$ nach (6), daher $th_m(q) \in V_0$, mithin $h^{**}(q) = h^*(q)$. Also:

(8) $$h^{**}(p) = th_m(p) \text{ für } \mathrm{p} \in \overline{U}_m - U_m.$$

Schliesslich sei $h(p) = h_m(p)$ für $p \in S - U_m$ und

(9) $$h(p) = (t)^{-1} h^{**}(p) \text{ für } p \in \overline{U}_m.$$

Die so erklärte Abbildung h von S in T ist wegen (8) stetig. Wegen (7) ist $g(p) \neq h(p)$ für $p \in \overline{U}_m - a$. Wegen $A_m \subset U_m$ ist $g(p) \neq h(p)$ für $p \in \mathrm{S} - U_m$.

Nach (5) ist $d(f, g) < \varepsilon$. Zum Beweis, dass $d(f, h) < \varepsilon$, sei q ein fester Punkt aus S. Wenn $q \notin U_m$, so folgt $d(f(q), h(q)) < \varepsilon$ aus (5). Sei nun $q \in \overline{U}_m$. Dann ist $f(q) \in V$ nach (6). Der Erklärung von h^{**} zufolge ist $h^{**}(q) \in \overline{V}_0$, also $(t)^{-1}h^{**}(q) \in (t)^{-1}(\overline{V}_0)$, mithin $h(q) \in \overline{V}$ nach (9). Nun hat $\overline{V}$ einen Durchmesser $< \varepsilon$, so dass $d(f(q), h(q)) < \varepsilon$ aus $f(q) \in V$ und $h(q) \in \overline{V}$ folgt.

3. *Ueber homotope Paare.* — Wir befassen uns im vorliegenden Abschnitt mit kanononischen Abbildungspaaren, die homotop sind. Die Bedeutung kanonischer Abbildungspaare geht aus dem letzten Abschnitt hervor.

Seien g, h, g', h' stetige Abbildungen von S in T, g zu g' homotop, h zu h' homotop, das Abbildungspaar (g, h) und ebenso das Abbildungspaar (g', h') kanonisch. Dann gibt es von τ stetig abhängende kanonische Abbildungspaare (g^τ, h^τ), $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von S in T derart, dass $(g^0, h^0) = (g, h)$ und $(g^1, h^1) = (g', h')$.

Beweis. — Wie aus Bemerkungen des ersten Abschnittes folgt, existieren ein Punkt a in S, von τ stetig abhängende stetige Abbildungen

$$g_0^\tau \text{ und } h_0^\tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

von S in T, die folgenden Eigenschaften besitzen: $(g_0^0, h_0^0) = (g, h)$ und $(g_0^1, h_0^1) = (g', h')$, für alle τ ist g_0^τ zu h_0^τ benachbart, für alle τ ist die Menge A_0^τ der Uebereinstimmungspunkte von (g_0^τ, h_0^τ) zu a fremd. Sei $f^\tau = g_0^\tau$ für alle τ.

Jede der Mengen A_0^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, ist kompakt. Somit existiert eine Kugelkappe U_0 von S derart, dass $\Sigma A_0^\tau \subset S - \overline{U}_0$.

Wir bezeichnen den halben Radius von T mit γ. Dann gibt es eine Zahl δ, Kugelkappen $U_1, \ldots, U_m$ von S und von τ stetig abhängende topologische Abbildungen

$$(t_0^\sigma,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1), \ldots, \quad (t_{m-1}^\sigma,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1)$$

von S auf sich, die die Eigenschaften haben: wenn y eine stetige Abbildung von S in T, τ eine Zahl mit $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ und $d(f^\tau, y) < \delta$, so ist

$$d(y, y(t_i^\sigma)^{-1}) < \gamma \tag{1}$$

für alle (i, σ) mit $i = 0, \ldots, m-1$ und $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; für $i = 0, \ldots, m-1$ ist

$$\overline{U}_i \subset U_{i+1} \text{ und } t_i^1(\overline{U}_i) = \overline{U}_{i+1};$$

für alle (i, σ) ist $t_i^\sigma(U_i) \supset U_i$; für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ hat die Menge $f^\tau(S - U_m)$ einen Durchmesser $< \gamma$.

Wie man leicht bestätigt, kann man annehmen, es sei $d(f^\tau, h_0^\tau) < \min(\gamma, \delta)$ für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Bedeute j eine der Zahlen $0, \ldots, m-2$. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, es existierte eine Deformation $((g_j^\tau, h_j^\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ von (g, h) in (g', h') mit den Eigenschaften:

$$d(f^\tau, g_j^\tau) < \min(\gamma, \delta) \text{ und } d(f^\tau, h_j^\tau) < \min(\gamma, \delta) \text{ für } 0 \leqslant \tau \leqslant 1; \tag{2}$$

bezeichnet A_j^τ die Menge der Uebereinstimmungspunkte von (g_j^τ, h_j^τ), so ist $A_j^\tau \subset S - \overline{U}_j$ für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Man kann annehmen, der Uebereinstimmungspunkt von (g, h) und ebenso der von (g', h') liege in $S - \overline{U}_m$. Dann gibt es Zahlen $0 < \alpha < \beta < 1$ derart, dass

$$A_j^\tau \subset S - \overline{U}_{j+1}$$

für $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ und $\beta \leqslant \tau \leqslant 1$.

Sei φ eine stetige Abbildung des abgeschlossenen Intervalles zwischen 0 und 1 in eben diesem Intervall derart, dass $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ und $\varphi(\tau) = 1$ für $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$.

Hierauf setzen wir $g_j^{\tau *} = g_j^\tau(t_j^{\varphi(\tau)})^{-1}$ und $h_j^{\tau *} = h_j^\tau(t_j^{\varphi(\tau)})^{-1}$ für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Dann ist, wie aus (1) und (2) folgt $d(g_j^\tau, g_j^{\tau *}) < \gamma$ und $d(h_j^\tau, h_j^{\tau *}) < \gamma$. Somit folgt

$$d(f^\tau, g_j^{\tau *}) < 2\gamma \text{ und } d(f^\tau, h_j^{\tau *}) < 2\gamma \tag{3}$$

für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ aus den Beziehungen (2).

Die Menge $t_j^{\varphi(\tau)}(A_j^\tau)$ bezeichnen wir auch mit A_{j+1}^τ. Wie man leicht bestätigt, ist A_{j+1}^τ die Menge aller Punkte p aus S mit $g_j^{\tau *}(p) = h_j^{\tau *}(p)$. Zum Beweis, dass

$$A_{j+1}^\tau \subset S - \overline{U}_{j+1} \text{ für } 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

sei *erstens* $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ oder $\beta \leqslant \tau \leqslant 1$. Dann ist $A_j^\tau \subset S - \overline{U}_{j+1}$, wegen $t_j^\sigma(U_{j+1}) \supset U_{j+1}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, daher die Behauptung richtig. Wenn *zweitens* $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, so ist $\varphi(\tau) = 1$, daher $A_{j+1}^\tau = t_j^1(A_j^\tau)$, wegen $t_j^1(U_j) = U_{j+1}$ oder $t_j^1(S - \overline{U}_j) = S - \overline{U}_{j+1}$ und $A_j^\tau \subset S - \overline{U}_j$ also die Behauptung gleichfalls richtig.

Es ist $g_j^{0*} = g_j^0$, $h_j^{0*} = h_j^0$, $d(f^0, g_j^0) < \min(\gamma, \delta)$ und $d(f^0, h_j^0) < \min(\gamma, \delta)$. Somit existieren Zahlen $0 < \alpha_1 < \beta_1 < 1$ derart, dass

$$d(f^\tau, g_j^{\tau *}) < \min(\gamma, \delta) \text{ und } d(f^\tau, h_j^{\tau *}) < \min(\gamma, \delta)$$

für $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1$ und $\beta_1 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Sei φ_1 eine stetige Abbildung des abgeschlossenen Intervalles zwischen 0 und 1 in eben diesem Intervall derart, dass $\varphi_1(0)=\varphi_1(1)=0$ und $\varphi_1(\tau)=1$ für $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$.

Sind p_1, p_2 zwei nicht antipodisch gelegene Punkte aus T, so sei $X(p_1, p_2)$ das 1-Simplex mit p_1, p_2 als Eckpunkten, $X_1(p_1, p_2)$ die Projektion von $X(p_1, p_2)$ auf T aus dem Mittelpunkt b von T und $\xi(p_1, p_2)$ die Länge des Bogens $X_1(p_1, p_2)$. Wenn τ eine Zahl mit $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, so sei $x(p_1, p_2, \tau)$ jener Punkt auf $\bar{X}_1(p_1, p_2)$, dessen Bogenabstand von p_1 gleich $\tau\xi(p_1, p_2)$ ist. Für $\tau > 1$ sei $x(p_1, p_2, \tau) = p_2$.

Offenbar gibt es eine Zahl ζ mit $0 < \zeta < 1$ derart, dass für alle nicht antipodisch gelegenen Punktpaare (p_1, p_2) aus T die Entfernung

$$(4) \qquad d(p_1, x(p_1, p_2, \zeta)) < \min(\gamma, \delta).$$

Hierauf setzen wir

$$g^\tau_{j+1}(p) = x[f^\tau(p), g^{\tau *}_j(p), \zeta\varphi_1(\tau) + (1-\varphi_1(\tau))],$$
$$h^\tau_{j+1}(p) = x[f^\tau(p), h^{\tau *}_j(p), \zeta\varphi_1(\tau) + (1-\varphi_1(\tau))]$$

in allen (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Die vorstehende Erklärung der Abbildungen g^τ_{j+1} und h^τ_{j+1} ist wegen (3) möglich. Wegen $\zeta\varphi_1(0) + (1-\varphi_1(0)) = 1$ ist $g^0_{j+1} = g^{0*}_j$, wegen $g^{0*}_j = g^0_j$ und $g^0_j = g$ daher $g^0_{j+1} = g$. Entsprechend ergibt sich, dass $h^0_{j+1} = h$, $g^1_{j+1} = g'$ und $h^1_{j+1} = h'$.

Zum Beweis, dass $d(f^\tau, g^\tau_{j+1}) < \min(\gamma, \delta)$ und $d(f^\tau, h^\tau_{j+1}) < \min(\gamma, \delta)$ für alle τ, sei erstens $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1$ oder $\beta_1 \leqslant \tau \leqslant 1$. Dann ist $d(f^\tau, g^{\tau *}_j) < \min(\gamma, \delta)$ und $d(f^\tau, h^{\tau *}_j) < \min(\gamma, \delta)$, daher die Behauptung richtig. Wenn zweitens $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$, so ist $\varphi_1(\tau) = 1$, also

$$g^\tau_{j+1}(p) = x(f^\tau(p), g^{\tau *}_j(p), \zeta),$$

wegen (4) daher die Entfernung zwischen $f^\tau(p)$ und $g^\tau_{j+1}(p)$ kleiner als $\min(\gamma, \delta)$. Ebenso ergibt sich, dass $d(f^\tau(p), h^\tau_{j+1}(p)) < \min(\gamma, \delta)$.

Zum Beweis, dass A^τ_{j+1} die Menge der Uebereinstimmungspunkte von $(g^\tau_{j+1}, h^\tau_{j+1})$, genügt es, da $g^{\tau *}_j(p) = h^{\tau *}_j(p)$ und also $g^\tau_{j+1}(p) = h^\tau_{j+1}(p)$ für $p \in A^\tau_{j+1}$ ist, nachzuweisen: wenn q ein Punkt aus $S - A^\tau_{j+1}$, so ist $g^\tau_{j+1}(q) \neq h^\tau_{j+1}(q)$. Das ergibt sich wie folgt. Nach der Erklärung von A^τ_{j+1} ist $g^{\tau *}_j(q) \neq h^{\tau *}_j(q)$. Es existiere *erstens* keine zweidimensionale Ebene, die die vier Punkte

$$b, \quad f^\tau(p), \quad g^{\tau *}_j(q), \quad h^{\tau *}_j(q)$$

enthält. Bedeuten dann B das 1-Simplex mit den Eckpunkten $f^\tau(q)$, $g^{\tau *}_j(q)$ und C das 1-Simplex mit den Eckpunkten $f^\tau(q)$, $h^{\tau *}_j(q)$, ferner B_1, C_1 die Projektion von B beziehungsweise C auf T aus b, so ist

$$g^\tau_{j+1}(q) \in \bar{B}_1, \; h^\tau_{j+1}(q) \in \bar{C}_1, \; \bar{B}_1 \cdot \bar{C}_1 = f^\tau(q),$$

mithin $g^\tau_{j+1}(q) \neq h^\tau_{j+1}(q)$. Wenn *zweitens* b, B und C in einer zweidimensionalen Ebene liegen, so ist $B \subset C$ oder $C \subset B$. Und aus der Erklärung von x folgt unmittelbar, dass $g^\tau_{j+1}(q) \neq h^\tau_{j+1}(q)$.

Somit existieren in $S-\overline{U}_m$ gelegene abgeschlossene Mengen A^τ_m, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, und eine Deformation $((g^\tau, h^\tau_m), 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ von (g, h) in (g', h'), die die Eigenschaften hat: für alle τ ist

$$(5) \qquad d(f^\tau, g^\tau) < \gamma \text{ sowie } d(f^\tau, h^\tau_m) < \gamma$$

und A^τ_m die Menge der Uebereinstimmungspunkte von (g^τ, h^τ_m).

Seien V^τ, $0 < \tau < 1$, von τ stetig abhängende Kugelkappen aus S, so dass $V^\tau \subset S-\overline{U}_m$ für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ und, wenn $d(V^\tau)$ den Durchmesser von V^τ bedeutet, weiter gilt: $\lim d(V^\tau) = 0$ sowohl für τ gegen 0 wie für τ gegen 1, für $0 < \tau < 1$ ist $A^\tau_m \subset V^\tau$.

Für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ hat $g^\tau(S-U_m) + h^\tau_m(S-U_m)$ einen Durchmesser $< 4\gamma$: Der Erklärung von U_m zufolge ist der Durchmesser von $f^\tau(S-U_m)$ kleiner als γ. Daher folgt die Behauptung aus (5).

Mithin existieren von τ stetig abhängende Kugelkappen W^τ, $0 < \tau < 1$, aus T, die die Eigenschaften besitzen: für $0 < \tau < 1$ ist

$$g^\tau(\overline{V}^\tau) + h^\tau_m(\overline{V}^\tau) \subset W^\tau;$$

bedeutet $d(W^\tau)$ den Durchmesser von W^τ, so ist $\lim d(W^\tau) = 0$ sowohl für τ gegen 0 wie für τ gegen 1.

Um den Beweis zu Ende zu führen, genügt es daher zu zeigen: es gibt Punkte $c^\tau \in V^\tau$, $0 < \tau < 1$, und von τ stetig abhängende stetige Abbildungen h^τ_{m+1}, $0 < \tau < 1$, von $\overline{V}^\tau$ in W^τ derart, dass

$$h^\tau_{m+1}(p) = h^\tau_m(p)$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V}^\tau - V^\tau$ und $0 < \tau < 1$, ferner $g^\tau(c^\tau) = h^\tau_{m+1}(c^\tau)$ für $0 < \tau < 1$ und

$$g^\tau(p) \neq h^\tau_{m+1}(p)$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V}^\tau - c^\tau$ und $0 < \tau < 1$. Die Existenz solcher Abbildungen folgt aber leicht aus der nachstehenden elementaren Bemerkung.

Seien V, W Simplexe positiver Dimension, weiter γ^τ und φ^τ, $0 < \tau < 1$, von τ stetig abhängende stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in W. Sei

$$\gamma^\tau(p) \neq \varphi^\tau(p)$$

in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 < \tau < 1$. Dann gibt es einen Punkt c in V und von τ stetig abhängende stetige Abbildungen φ^τ_1, $0 < \tau < 1$, von $\overline{V}$ in W, die die Eigenschaften haben: in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 < \tau < 1$ ist $\varphi^\tau_1(p) = \varphi^\tau(p)$, in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - c$ und $0 < \tau < 1$ ist $\gamma^\tau(p) \neq \varphi^\tau_1(p)$, für $0 < \tau < 1$ ist $\gamma^\tau(c) = \varphi^\tau_1(c)$.

4. *Invarianz der Stabilität.* — Wir wenden uns wieder der Einleitung zu. Die Bedeutung von f und F sei die dort erklärte. Der erste Teil des in der Einleitung angegebenen Theorems, also die Existenz von g_1 und g_2, ist schon im zweiten Abschnitt bewiesen. Seien das Abbildungspaar (g_1, g_2) stabil und g eine Abbildung aus F. Dann führt die Annahme,

dass $f(p) \neq g(p)$ in allen Punkten p aus S, wie folgt auf einen Widerspruch.

Wie man sich leicht überlegt, gibt es von τ stetig abhängende stetige Abbildungen φ^τ und γ^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von S in T mit $\varphi^0 = f$, $\gamma^0 = g$ und den weiteren Eigenschaften: in allen (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leqslant \tau < 1$ ist $\varphi^\tau(p) \neq \gamma^\tau(p)$; für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ ist φ^τ zu γ^τ benachbart; die Gleichung $\varphi^1(p) = \gamma^1(p)$ hat genau eine Lösung, und diese letztere ist nicht stabil. Nach den Ergebnissen des dritten Abschnittes genügt es daher zum Beweis unseres Theorems, folgendes zu zeigen.

Seien (g^τ, h^τ), $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, von τ stetig abhängende kanonische Abbildungspaare von S in T und (g^0, h^0) stabil. Dann ist auch (g^1, h^1) stabil.

Da die Wesentlichkeit einer stetigen Abbildung gegenüber Deformationen invariant, ist der vorstehende Satz richtig, falls gilt: es bezeichne a^τ für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ die Lösung der Gleichung $g^\tau(p) = h^\tau(p)$, dann hängt a^τ stetig von τ ab.

Zum Beweis der letzteren Aussage wollen wir annehmen, es sei a^τ nicht stetig in τ. Dann existieren eine Zahl $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ und eine positive Zahl ε derart, dass es zu jeder beliebigen positiven Zahl δ eine Zahl η mit

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1, \ |\zeta - \eta| < \delta \text{ und } d(a^\zeta, a^\eta) > \varepsilon$$

gibt. Hierauf existieren Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots,$ derart, dass erstens

$$0 \leqslant \zeta_i \leqslant 1 \text{ und } d(a^\zeta, a^{\zeta_i}) > \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen i, zweitens $\lim \zeta_i = \zeta$ und dass drittens der Grenzwert $\lim a^{\zeta_i}$ existiert. Bezeichnen wir den letzteren mit b, so ist

$$a^\zeta \neq b.$$

Aus $\lim a^{\zeta_i} = b$ und $g^\tau(a^\tau) = h^\tau(a^\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, folgt $g^\zeta(b) = h^\zeta(b)$. Die letzte Gleichung und $g^\zeta(a^\zeta) = h^\zeta(a^\zeta)$ widersprechen einander.